

**ДОСЛІДЖЕННЯ ВІБРОРЕОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ШАРУ СИПКОГО СЕРЕДОВИЩА**

**Полєвода Юрій Алікович**, к.т.н., доцент,  
**Волинець Євгеній Олександрович**, аспірант,  
Вінницький національний аграрний університет

**Yurii Polievoda**, Ph.D., Associate Professor  
**Yevhenii Volynets**, Postgraduate  
Vinnytsia National Agrarian University

*Вібраційна механіка і віброреологія грають важливу роль в сформованому за останні роки новому розділі прикладної теорії коливань – теорії вібраційних процесів і пристроїв. Ця теорія вивчає закономірності збудження і дії вібрації в різних механічних системах; вона включає також теорію машин, в яких вібрація використовується для досягнення корисних цілей.*

*На основі розглянутих моделей виявилось можливим описати хаотичний рух шару сипкого середовища над вібруючою площиною. Такі рухи, добре відомі для рідини, дійсно вдалося спостерігати і в разі сипучого середовища, що служить ще одним підтвердженням можливості моделювання повільних рухів сипучого середовища при вібрації у вигляді рухів в'язкої рідини (звичайно, зі зробленими вище застереженнями і доповненнями).*

*При вивченні описаних найпростіших моделей рух (в тому числі і тих, що нас цікавить – повільне) може бути знайдено шляхом безпосереднього використання рішення задачі про вібротранспортування тіла (частинки). Значення даного підходу визначається, проте, можливість його застосування для наближеного рішення трапляється в більш складних випадках. При вивченні повільних рухів тіл, взаємодіючих як за допомогою сил сухого тертя, так і зіткнень, зазначені взаємодії можуть моделюватися силами в'язкого тертя з урахуванням рушійної вібраційної сили. Це призводить до викладеного нижче віброреологічного підходу до моделювання поведінки сипкого середовища у вібруючих лотках і контейнерах.*

*З усіх розглянутих моделей найбільш перспективною є модель поведінки сипкого середовища при дії вібрації у вигляді в'язкого середовища. Описані моделі можуть бути використані і при розгляді практично важливого завдання про проникнення «вібрації» в сипке середовище.*

**Ключові слова:** віброреологія, аналіз, вібротранспортування, робочий контейнер, сегрегація, псевдорозрідження.

**Ф. 21. Рис. 9. Літ. 8.**

---

**1. Постановка проблеми**

---

Визначення руху сипких середовищ обладнання реалізації вібраційних технологій (зокрема вібраційного об'ємного оброблення, помелу, сепарації тощо) є доволі складним завданням динаміки, яке до сьогодні повністю не досліджено. Причини останнього – громіздкість математичного апарата, специфіка роботи, описання динаміки сипкого середовища, спростовані гіпотези та припущення, лінійність моделей, що не завжди адекватно відображають реальну фізику досліджуваного вібраційного процесу [1].

---

**2. Аналіз останніх досліджень та публікацій**

---

Аналіз відомих досліджень вказує на те, що лише окремі вчені досліджували ефективність вібраційної дії при розділенні або змішуванні рідких неоднорідних систем в харчових чи переробних технологіях; такі дослідження не мали системного і комплексного характеру, що викликає труднощі при проектуванні перспективних технологічних та конструктивних схем вібраційної переробної техніки; а розроблені конструкції машин часто відзначаються високими динамічними навантаженнями на опорні механізми та недосконалою системою нівелювання паразитних коливань. Принципові переваги вібраційної дії, як основного технологічного впливу дозволяє вирішувати ряд технологічних задач при перемішуванні рідких та сипких неоднорідних систем у харчовій промисловості [2].

Серед високопродуктивних технологій з порівняно малими енерго- і матеріалозатратами значну частку становлять ті, які використовують різноманітні вібраційні процеси, що сприяє підвищенню якості обробки, рівня механізації та автоматизації багатьох трудомістких операцій,

економічної ефективності та продуктивності праці тощо. Вібраційні процеси залежно від галузей їх застосування можна розділити на декілька узагальнених технологічних напрямки: а) вібровплив на середовище, насипні та дисперсні системи; б) деформування і руйнування; в) подрібнення матеріалів; г) введення вібраційних елементів в середовища різної густини; д) розділення гранульованого середовища за його геометричними та іншими параметрами. Для вібраційних процесів характерні хвильові явища, а останнім незалежно від їх характеру і властивостей притаманні загальнохвильові закономірності. Кожна вібраційна система характеризується приводом (джерелом коливань); робочим простором, у межах якого реалізується енергія коливань і здійснюється вібраційний вплив на об'єкт оброблення (середовище деталі, конструкції тощо) [3].

### 3. Мета і задачі дослідження

Ефективний математичний опис поведінки сипкого середовища під дією вібрації становить значний прикладний інтерес. Цьому завданню механіки присвячений ряд цікавих робіт проте проблема ще далека від задовільного вирішення. У даній науковій роботі, на основі віброреологічного підходу, планується розглянути деякі моделі, які описують повільні потоки сипкого середовища, що генеруються вібрацією. Все це буде використано при подальших дослідженнях математичної моделі розробленого комбінованого віброзмішувача.

### 4. Виклад основного матеріалу

Вперше факт «рідинної» поведінки сипучого середовища при вібраціях був експериментально доведений академіком П. А. Ребіндером і його співробітниками. Доведено, що за допомогою дії вібрації сипке середовище можна ущільнювати і розпушувати, переміщати і бункерувати, розділяти і змішувати, а також досягати багато інших корисних ефектів. Ці операції є основними в технологічних процесах харчових і переробних виробництв, що й обумовлює отримання позитивного ефекту від використання вібраційних машин даного спрямування (рис. 1).

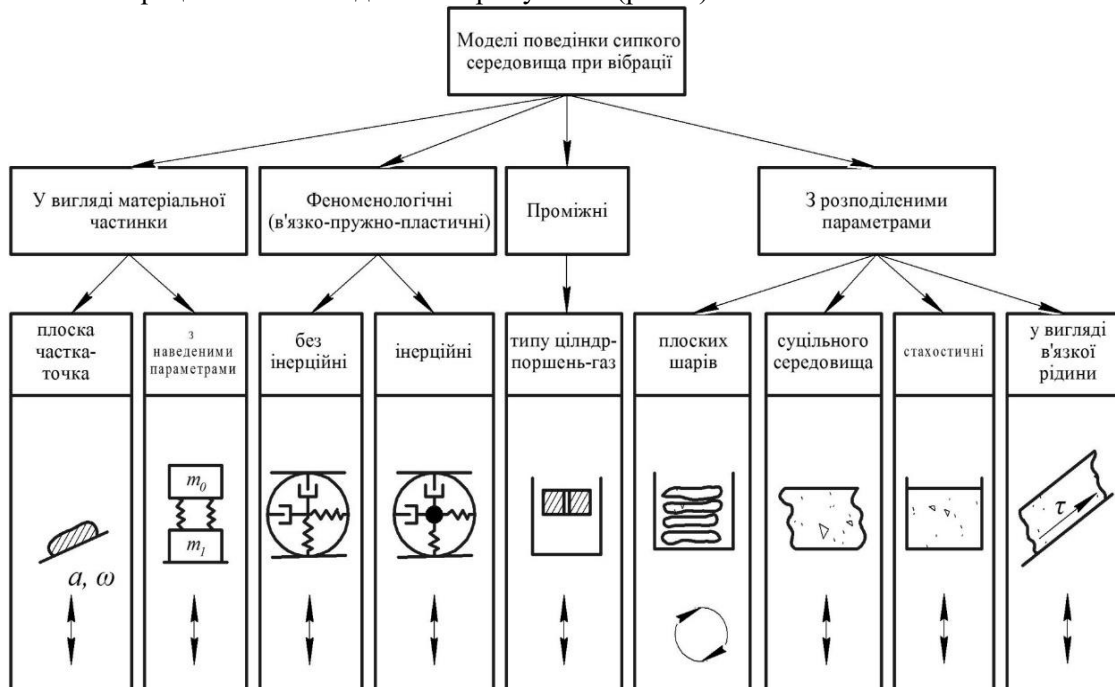


Рис. 1. Класифікація існуючих моделей поведінки сипкого середовища

Дослідження процесу течії вискозодисперсних порошків при дії вібрації проводили на спеціально створеному капілярному вібро віскозиметрі. Як критерій здатності тонкодисперсного порошку до закінчення в умовах вібрацій з різними параметрами (частотою і амплітудою) вібраційного поля приймалася величина вібраційної в'язкості.

Для опису фізичної сутності процесу змішування необхідно вибрати дві моделі і розглянути їх в сукупності: модель у вигляді окремої матеріальної частинки і модель, у вигляді в'язкого середовища через складність процесу і відсутності єдиної теорії змішування сипких матеріалів [4].

Зупинимося спочатку на описі деяких основних закономірностей поведінки сипкого середовища у вібруючих посудинах. Певний розподіл дії вібрації в сипкому середовищі в таких

посудинах встановлюється досить швидко – після закінчення декількох періодів коливань. Це – «швидкий» процес, на тлі якого і відбуваються повільно протікаючі процеси, тобто виникають певні потоки та відбуваються процеси сегрегації (самосортування). Звичайно, що для вивчення цих повільних і, як правило, найбільш цікавих процесів, знання швидкого процесу, тобто усталеного вібраційного поля, представляє першорядне значення. Тут же зупинимося на деяких якісних закономірностях і міркуваннях. Нехай  $A$  – амплітуда коливань, а  $\omega$  – частота гармонійної вібрації посудини із сипким середовищем. При прискореннях  $A\omega^2 < g$  для вертикальних  $A\omega^2 < f_1g$  для горизонтальних коливань ( $f_1$  – коефіцієнт тертя спокою,  $g$  – прискорення вільного падіння) матеріал рухається в основному разом з посудиною. При прискореннях  $A\omega^2 \approx g$  частинки матеріалу набувають деяку взаємну рухливість – починається псевдорозрідження, що приводить спочатку до ущільнення, а потім – при подальшому збільшенні  $A\omega^2$  – до розпушення і перемішування. Процеси поділу (сегрегації, самосортування) відбуваються на стадіях псевдорозрідження і розпушення [5].

Як зазначалося, при товщині шару  $h$ , що не перевищує деякого значення  $h^*$ , і при параметрах вібрації, що лежать в певних межах, рух сипкого середовища по вібруючій плоскій поверхні можна розглядати як рух твердого тіла (частинки). При цьому віброреологічною моделлю є таке тіло, на яке, поряд з іншими повільними силами, діє вібраційна сила  $v$ . Назвемо її моделлю А (рис. 2).

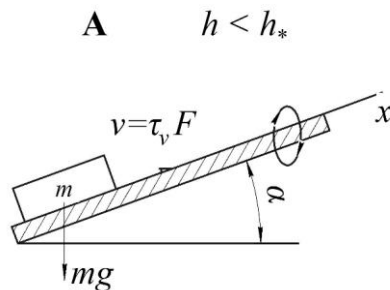


Рис. 2. Модель руху твердого тіла (частинки) при  $h \leq h^*$

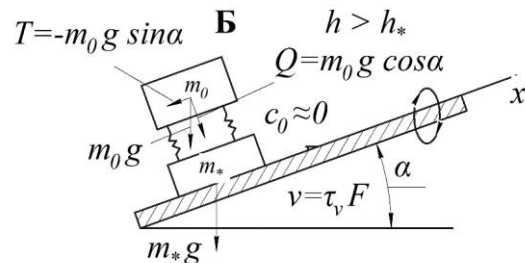


Рис. 3. Модель руху твердого тіла (частинки) при  $h > h^*$

Вібраційна сила  $v$  може бути знайдена в результаті рішення відповідної задачі про вібротранспортування або з використанням експериментальних даних. Так, наприклад, в разі режимів з досить інтенсивним підкиданням матеріалу над плоскою поверхнею, що здійснює поступальні коливання по еліптичних траєкторіях, вібраційна сила визначається наближеною формулою (1) [6]. Маючи на увазі подальший розгляд, зазначимо, що перейшовши в цій формулі від сили  $v$  до дотичних напружень  $\tau_v = v / F$ , де  $F$  – площа поверхні тіла, що зіштовхується з вібруючою поверхнею, можна уявити зазначену формулу таким чином:

$$\tau_v = \tau_v(v_\tau) = \tau_{v0} \left[ 1 - \left( \frac{v_\tau}{v_{\tau 0}} \right) \right]. \quad (1)$$

У разі, коли товщина шару сипкого середовища  $h$  перевищує вказане вище значення  $h^*$ , можна використовувати більш складну модель (модель Б), представлену на рис. 3.

Тіло з масою  $m^*$ , безпосередньо контактує з вібруючою плоскою поверхнею, пов'язана в даному випадку з тілом масою  $m_0$  за допомогою пружних елементів з дуже малою жорсткістю  $c_0$ ; при цьому  $m^* + m_0 = m$ , де  $m$  – маса всього шару. На тіло  $m^*$ , таким чином, діє додаткова постійна сила  $Q = m_0 \cdot g \cdot \cos \alpha$ ; при цьому для вібраційної сили  $v$  і дотичного напруження  $\tau_v$  справедливі ті ж формули, що і в попередньому випадку, але при  $Q = m_0 \cdot g \cdot \cos \alpha \neq 0$ . У першому наближенні можна прийняти:

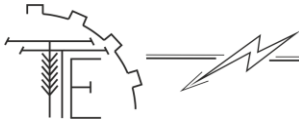
$$m_* = \rho \cdot F \cdot h_*, m_0 = \rho \cdot F (h - h_*), (m = m_* + m_0 = \rho \cdot F \cdot h), \quad (2)$$

де  $\rho$  – насипна щільність сипкого середовища;

$h^*$  – гранична товщина шару, при якій рух шару по вібруючій поверхні ще може розглядати як рух твердого тіла (частинки),  $h > h^*$  – загальна товщина шару.

Для визначеності будемо вважати, що значення величин  $\rho$ ,  $h$  і  $h^*$  віднесені до стану середовища при відсутності вібрації.

Описана модель, незважаючи на крайню простоту, дозволяє пояснити спадання середньої швидкості руху шару, а в багатьох випадках і питомої продуктивності, у міру збільшення товщини шару  $h$ . Це спадання пояснюється зменшенням у міру зростання  $h$  параметру переважання  $w_l$ , якому



пропорційна сила  $Q$ . Модель пояснює також збільшення «фази відриву матеріалу»  $\delta_0 = \arcsin 1 / w_1$  зі збільшенням  $h$ . У певних випадках розглянуту модель доцільно уточнити введенням амортизованого елемента між масами  $m^*$  і  $m_0$ .

Одним з таких випадків є рух шару сипкого середовища по неоднорідній вібруючій неплоскій поверхні, коли товщина шару, взагалі кажучи, різна в різних точках цієї поверхні. Відповідне завдання становить інтерес для ряду додатків. Вивчаючи одномірний рух середовища в лотку прямокутного поперечного перерізу, припускаємо, що точки лотка здійснюють періодичні коливання, параметри яких можуть залежати від дугової координати  $s$  точки поверхні.

Розглянемо спочатку випадок, коли товщина шару  $h$  повсюди менша введеної вище величини  $h^*$  (рис. 4).

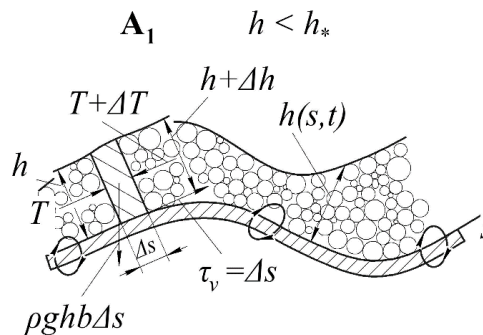


Рис. 4. Модель руху твердого тіла (частинки), коли  $h$  повсюди менша  $h^*$

Склавши рівняння руху елемента шару  $\Delta s$  приходимо в цьому випадку до наступного віброреологічного рівняння, що описує повільний («повзучий») рух шару середовища (назвемо відповідну модель моделлю  $A_1$ ):

$$ph \frac{\partial v_\tau}{\partial t} = -\rho \cdot g \cdot h \cdot \sin \alpha - \frac{\partial T}{\partial s} + \tau_v, \quad (3)$$

де  $v_\tau = v_\tau(s, t)$  – повільна складова швидкості середовища, а  $T = T(s, t; h)$  – сила взаємодії між елементами середовища, віднесена до одиниці «ширини» шару.

Силу  $T$  вважатимемо подібною гідростатичній силі, що діє на бічну поверхню елемента, і визначається за формулою:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot h^2}{\cos \alpha}. \quad (4)$$

Звичайно, передбачається також, що зміна кута нахилу  $\alpha$  й параметрів вібрації поверхні за проміжок часу порядку періоду коливань  $T = 2\pi / \omega$  незначно, і тому при обчисленні вібраційної напруги  $\tau_v$  зазначені величини можуть розглядатися як «заморожені». Як і вище, для визначеності будемо відносити насипну щільність середовища  $\rho$  і висоту шару  $h$  до стану середовища при відсутності вібрації. Вібраційна напруга  $\tau_v$  залежить від швидкості  $v_\tau$ , від товщини шару  $h$  і від координати  $s$ .

До рівняння (3) необхідно під'єднати відношення, що випливає з умови збереження маси:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(v_\tau \cdot h)}{\partial s}. \quad (5)$$

У разі коливань точок по еліптичних траєкторіях для режимів з інтенсивним підкиданням, коли:

$$w_1 = \frac{B \cdot \omega^2}{g \cdot \sin \alpha} > \frac{3,5(1+R)}{(1+R)^2}, \quad (6)$$

згідно з (1), (2) маємо наступне вираження для вібраційної напруги (враховуємо, що при  $h < h^*$  має бути  $Q = 0$ ):

$$\tau_v = \rho \cdot g \cdot h \cdot q_1 \cdot \cos \alpha \left( 1 - \frac{v_\tau}{v_{\tau 0}} \right), \quad (7)$$

де

$$q_1 = \frac{\lambda}{2-\lambda} \cdot \frac{1-R}{1+R} \cdot \frac{A}{B} \cos \delta, v_{\tau 0} = A \omega \cdot \cos \delta. \quad (8)$$

При врахуванні виразів (4), і (7) система із диференціальних рівнянь (3), (5) може бути представлена у наступній формулі:

$$\begin{aligned} \frac{h}{g} \cdot \frac{\partial v_{\tau}}{\partial t} &= -h \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{h^2}{\cos} \right) + h \cdot q_1 \cdot \cos \alpha - \left( \frac{v_{\tau}}{v_{\tau 0}} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= - \frac{\partial (v_{\tau} \cdot h)}{\partial s}. \end{aligned} \quad (9)$$

Зауважимо, що тут величини  $\alpha$ ,  $q_1$  і  $v_{\tau 0}$  є функціями дугової координати  $s$ . В якості початкових умов може бути заданий початковий розподіл товщини шару  $h(s, 0)$  і швидкості  $v_{\tau}(s, 0)$ .

Для багатьох додатків являє основний інтерес стаціонарний рух шару сипкого середовища під дією вібрації. В цьому випадку, вважаючи в рівняннях (9)  $\partial v_{\tau} / \partial t = 0$  і  $\partial h / \partial t = 0$ , отримуємо для висоти шару  $h$  наступне звичайне диференційного рівняння:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} h \cdot \cos \alpha \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\cos \alpha} \right) + q_1 \cdot \cos^2 \alpha \left( 1 - \frac{c}{b \cdot h \cdot v_{\tau 0}} \right), \quad (10)$$

де через  $c = v_{\tau} h b = \text{const}$  позначені об'ємні витрати середовища через перетин лотка ( $b$  – ширина лотка).

Розглянемо тепер випадок, коли на всій ширині шару  $h > h^*$ . Як і в моделі **Б**, будемо вважати, що інерційність зосереджена в нижній частині шару товщини  $h^*$ , безпосередньо контактує з вібруючою поверхнею, а частина яка розміщена вище діє на нижню за допомогою сил, подібних гідростатичному тиску; відповідна модель (**Б<sub>1</sub>**) представлена на рис. 5.

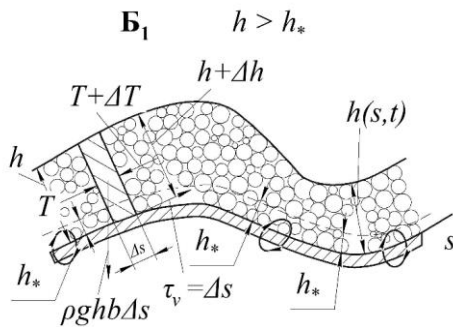


Рис. 5. Модель руху твердого тіла (частинки), коли  $h$  повсюди більша  $h^*$

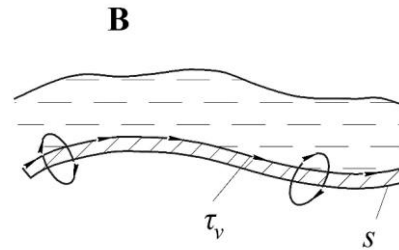


Рис. 6. Рух сипкого середовища у вигляді в'язкої рідини

Внаслідок того, що товщина «інерційної частини» шару в даному випадку фіксована, замість рівняння руху (3) будемо мати співвідношення:

$$ph_* \cdot \frac{\partial v_{\tau}}{\partial t} = -\rho \cdot g \cdot h \cdot \sin \alpha - \frac{\partial T}{\partial s} + \tau_v. \quad (11)$$

при чому наближене вираження для сили  $T$ , як і раніше, визначається формулою (4).

Слід очікувати, що моделі **Б** (рис. 3) і **Б<sub>1</sub>** (рис. 5) виявляться найбільш придатними для вивчення саме стаціонарних рухів шару сипкого середовища, а також у випадках, коли кут  $\alpha$  й параметри вібрації змінюються з координатою  $s$  досить повільно.

Відзначимо, що моделі **А<sub>1</sub>** і **Б<sub>1</sub>** легко узагальнюються на двовимірний випадок, коли сипуче середовище рухається по нециліндричній вібруючій поверхні. Рівняння (10) і (11) в цьому випадку замінюються відповідно векторним співвідношенням:

$$ph = \frac{\partial v_{\tau}}{\partial t} = -\rho \cdot g \cdot h - \text{grad} \cdot T + \tau_v, \quad (12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\text{div}(v_{\tau} \cdot h). \quad (13)$$

Тут сила  $T$  визначається формулою (4), а для отримання виразів для вібраційної напруги  $\tau_v$  необхідне рішення двовимірної задачі про вібротранспортування та розділення фракцій. Процеси

розділення під дією гравітаційних та відцентрових сил реалізуються тільки за наявності різниці густини елементів дисперсної та дисперсійної фаз [7].

Поряд з розглянутими випадками  $h < h^*$  і  $h > h^*$  можуть становити інтерес ситуації, коли на одних ділянках по довжині лотка виконується перша, а на інших – друга нерівність; тоді необхідне об'єднання у пару рішень відповідних диференціальних рівнянь.

Описані вище моделі не дозволяють вивчати внутрішньосферний рух в порівняно товстих шарах середовища. Такі процеси можуть бути досліджені на основі найбільш універсальної з розглянутих моделей (модель **В**; рис. 6).

Відповідно до цієї моделі повільний рух сипкого середовища при досить інтенсивній вібрації її частинок розглядається, як рух в'язкої (не обов'язково ньютонівської) рідини, реологічні характеристики якої, а також густина залежать від характеру вібрації. При цьому в областях, де вібрація недостатньо інтенсивна і псевдозрідження не виникає, сипке середовище можна розглядати як тверде тіло; при уточненому аналізі можливий і розгляд перехідної зони, в якій має місце не псевдозрідження середовища, а лише зниження ефективних коефіцієнтів сухого тертя. Що ж стосується умов на границі  $S$ , то замість звичайних для в'язкої рідини умов прилипання  $v|_S = 0$ , як і в раніше розглянутих моделях, на ділянках зіткнення середовища зі стінками, задається вираз для дотичного напруження  $v|_S = \tau_v (v_t)$ .

Як зазначалося, вираз для  $\tau_v (v_t)$  може бути знайдено або аналітично, або на основі досить простих експериментів; в ряді випадків вираз типу (1.8), отримане для режимів певного характеру, можна розглядати як апроксимацію, придатну при вивченні також і інших режимів. Втім, як зрозуміло з раніше викладеного, величина  $m^* / \rho F = h^*$  (товщина шару, що контактує з віброуючими стінками), по суті, може розглядатися як певний коефіцієнт, що визначається емпірично. Відзначимо при цьому, що в ряді випадків залежність  $\tau_v (v_t)$  від величини  $m^*$  є відносно слабкою, а іноді нею і взагалі можна знехтувати.

Як уже неодноразово зазначалося, на аналогію в поведінці рідини і сипкого середовища при вібрації давно зверталась увага дослідниками; ця аналогія була обґрунтована і теоретично доведена для досить розрідженого середовища «майже пружних» частинок в роботі Х. І. Раскіна. Вище відзначалася також недостатність цієї аналогії, зокрема – необхідність врахування вібраційних сил при вивченні повільних рухів. Ця обставина грає першорядну роль при формулюванні граничних умов, що і є основним у викладеному вище реченні (моделі **В**). У ряді випадків може виявитися необхідним урахування не тільки поверхневих, але і об'ємних вібраційних сил в рідині, що моделює сипуче середовище при вібрації. Зокрема, це необхідно при вивченні «повільних» процесів вібраційного поділу (сегрегації) компонентів сипучих сумішей.

Облік об'ємних вібраційних сил дозволив А. Я. Фідліну пояснити і описати повільні «конвективні» потоки, що виникають в симетричному і симетрично віброуючій посудині (рис. 7).

А. Я. Фідлін моделює сипке середовище у вигляді ньютонівської рідини, що зжимається з густиною та іншими параметрами, залежними від характеристик вібрації в даній точці середовища. При цьому передбачається, що «поле вібрації» в середовищі може бути описане одним скалярним параметром – «вібротемпературою», яка відповідно до теорії вібропровідності підпорядковується рівнянню теплопровідності при наявності джерела тепла. У таких припущеннях роль об'ємних вібраційних сил грають вхідні через залежність густини від вібротемператури сили типу архімедівських.

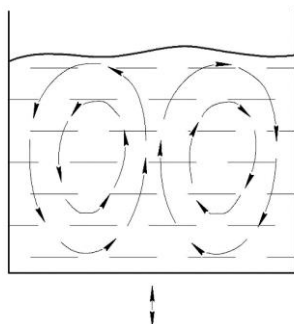


Рис. 7. Схема руху сипкого середовища, як ньютонівської рідини



Рис. 8. Схема руху в полі сили тяжіння над віброуючою площиною

Для оцінки параметрів запропонованої моделі А. Я. Фідліним був розглянутий ланцюжок  $N$  однакових частинок, що рухаються в полі сили тяжіння над віброуючою площиною (рис. 8). Рух такого ланцюжка вивчався чисельно на ЕОМ, що і дозволило отримати згадані оцінки.

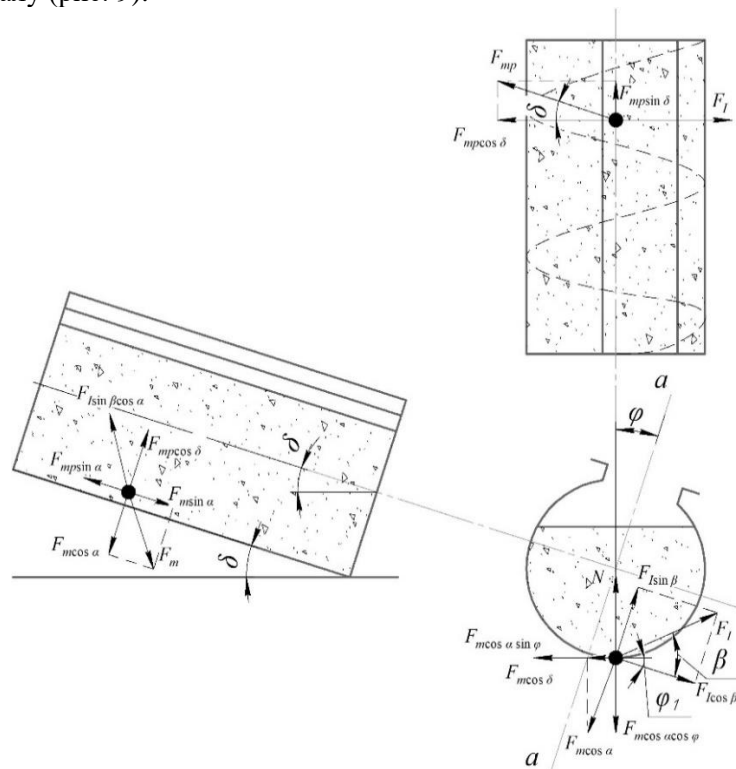
Чисельні експерименти з ланцюжком відбивання частинок послужили основою і для фізичної моделі поведінки сипкого середовища під дією вібрації, запропонованої Е. Б. Кремером і А. Л. Фідліним; ця модель (модель С) до певної міри також може бути віднесена до числа віброреологічних. Один з основних фактів, виявлених при чисельному моделюванні, полягав у тому, що частота зіткнення між частинками виявилася значно більшою за частоту вібрації. Це дозволило провести статистичне зрівноваження рівнянь перенесення енергії і імпульсу з використанням центральної граничної теореми теорії ймовірностей. Побудована на цій основі одномірною континуальна модель призводить до досить складної нелінійної системи диференціальних рівнянь у часткових похідних, яку, однак, вдається аналітично вирішити в деяких найпростіших окремих випадках.

Відзначимо, що певні труднощі пов'язані із узагальненням моделі С на тривимірний випадок, а також з формулюванням відповідних цій моделі граничних умов [8].

При описі руху матеріальної частинки в робочому органі вібраційного змішувача прийняті наступні допущення:

- циркуляційний рух матеріальної частки складається з підйому його по циліндричній поверхні жолоба і скочування з вільної поверхні сипкого матеріалу і траєкторія руху частинки являє кручену лінію;
- сила тяжіння порівнювалась з іншими діючими на матеріальну частку силами;
- кутова частота коливач жолоба  $A$  постійна,  $A = \text{const}$ ;
- кут вібрації жолоба  $P$  постійний,  $P = \text{const}$ ;
- кут нахилу змішувача  $\alpha$  постійний,  $\alpha = \text{const}$ .

Для визначення основних параметрів вібраційного змішувача наведемо схему сил, діючих на частинку сипкого матеріалу (рис. 9).



**Рис. 9** Схема сил, що діють на частинку сипкого матеріалу:  
 $F_I$  – сила інерції (вібраційна сила);  $F_m$  – сила тяжіння;  $F_{mp}$  – сила тертя;  
 $N$  – сила нормальної реакції;  $\alpha$  – вертикальна площина

Для забезпечення циркуляційного руху в стані «псевдорозрідження» необхідно, щоб дотримувалася умова: сила інерції частинки сипкого матеріалу має перевищувати сили тяжіння і тертя. У вертикальній площині ця умова виглядає:

$$F_I \cdot \sin \beta \cos \alpha \geq F_m - F_{mp} \cdot \sin \delta \sin \alpha + N \cos \alpha \cdot \cos \varphi_1 + F_{mp} \cos \delta \cos \alpha \sin \varphi_1 \quad (14)$$



або

$$Am\omega^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \geq mg - fmg \cdot \sin \delta \cdot \sin \alpha + fmg \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_1 + fmg \cos \beta \cos \alpha \sin \varphi_1, \quad (15)$$

де  $m$  – маса частинки сипкого матеріалу, кг;  $\omega$  – кругова частота коливань жолоба,  $\text{с}^{-1}$ ;  $A$  – амплітуда коливань жолоба, м;  $\beta$  – кут напрямку вібрації жолоба, град;  $\alpha$  – кут нахилу робочого органу до горизонту, град;  $\varphi_1$  – кут нахилу сипкого матеріалу, рівний куту тертя ковзання, град;  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $\text{м/с}^2$ ;  $f$  – коефіцієнт внутрішнього тертя.

Оскільки в умові (15) ліва частина має максимальне значення при  $\omega t = \pi / 2$ ,  $N = 0$ , то відрив частки настає, коли:

$$\Gamma = \frac{A\omega^2 \sin \beta \cos \alpha}{g(1 - f \sin \delta \cdot \sin \alpha + f \cos \delta \cos \alpha \sin \varphi_1)} > 1, \quad (16)$$

де  $\Gamma$  – безрозмірний параметр, названий коефіцієнтом режиму вібраційної установки, що характеризує стан сипучого середовища; при  $\Gamma < 1$  – рух матеріалу відбувається без відриву від робочого органу поверхні; при  $\Gamma > 1$  – з відривом; при  $\Gamma = 1$  – межа режимів з відривом і без відриву частинки від вібруючої поверхні.

При дотриманні умови (14) в робочому контейнері відбувається інтенсивне змішування компонентів, так як частинки середовища починають втрачати контакт з вібруючою поверхнею робочого органу і сипке середовище переходить в стан «псевдорозріження» і «віброкипіння», де відбувається ефективно і повне руйнування її структури і розрив зв'язків між частинками, при цьому прискорення нормальної складової сили інерції частинки більше за значенням  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ :

$$\frac{A\omega^2 \sin \beta \cos \alpha}{1 - f \sin \delta \cdot \sin \alpha + f \cos \delta \cos \alpha \sin \varphi_1} > g. \quad (17)$$

Підставивши значення амплітуди коливань, кута вібрації і коефіцієнта внутрішнього тертя матеріалу, отримаємо мінімальне значення кутової частоти коливань при використанні поперечної вібрації буде:

$$\omega = \sqrt{\frac{g(1 - f \sin \delta \cdot \sin \alpha + f \cos \delta \cos \alpha \sin \varphi_1)}{A \sin \beta \cos \alpha}}. \quad (18)$$

З рис. 9 видно, що кут підйому гвинтової лінії  $\delta$  в вібраційному змішувачі залежить від кута  $\alpha$ . Сила тертя сипкого матеріалу  $F_{mp}$  спрямована по дотичній до гвинтової лінії. Під дією сили інерції  $F_I$  частинка сипкого матеріалу рухається вгору по гвинтовій лінії. Складові сили тертя в поперечній площині протилежна за напрямком руху частинки вгору і має знак «-».

Без урахування сили інерції (вібраційної сили)  $F_I$  при скочуванні частинки по вільній поверхні, умови рівноваги сил для його частинки з масою  $m$  має вигляд:

$$F_m \sin \alpha = F_{mp} \sin \delta, \quad (19)$$

$$F_m \cos \alpha \sin \varphi_1 = F_{mp} \cos \delta, \quad (20)$$

де  $\varphi_1$  – кут нахилу сипкого матеріалу в поперечному перерізі до вертикалі а-а (рис. 9).

Із рівнянь (17) і (18) отримаємо:

$$\text{tg} \delta = \frac{\text{tg} \alpha}{\sin \varphi_1}. \quad (21)$$

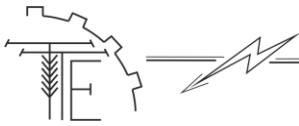
Це дозволяє нам уточнити формулу визначення середньої швидкості транспортування сипучого матеріалу всередині робочого контейнера [4].

## 5. Висновки

Запропоновано моделі поведінки сипкого середовища в процесі дії вібрації. В її основу покладено підхід І. І. Блехмана до аналізу рівнянь, які описують повільні рухи – основні рівняння вібраційної механіки.

Отримано аналітичні залежності для ефективного математичного опису поведінки сипкого середовища під дією вібрації.

На основі аналізу досліджень математичних моделей встановлено, що моделі А1 та Б1 найбільше підходять для опису руху матеріальної частинки в середині контейнера комбінованого вібраційного змішувача, який розроблений у лабораторії кафедри технологічних процесів переробних і харчових виробництв Вінницького національного аграрного університету.

**Список використаних джерел**

1. Субач А. П. Динамика процессов и машин объемной обработки. Рига, 1991. 240 с.
2. Полєвода Ю. А. Перспективи застосування вібраційних ефектів в рідких технологічних системах харчових і переробних виробництв. *Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету*. 2015. Вип. 1. С. 124–130.
3. Бабичев А. П. Проблемы вибрационной технологии. *Вібрації в техніці та технологіях*. Вінниця, 1994. Вип. 1. С. 1–3.
4. Николаев В. Н. Разработка и обоснование основных параметров вибрационного смесителя сыпучих кормов: дис. на соискание уч. степени кандидата тех. наук: 05.20.01. Челябинский государственный агроинженерный университет. Челябинск, 2004. 141 с.
5. Блехман И. И. Метод прямого разделения движений в задачах о действии вибрации на нелинейные механические системы. *Сер. Механика твердого тела*. 1976. Вип. 6. С. 13–27.
6. Блехман И. И. Вибрационная механика. Москва, 1994, 400 с.
7. Паламарчук І. П., Полєвода Ю. А., Янович В. П. Аналіз математичної моделі вібровідцентрової машини для очищення рідкої сировини. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2009. Вип. 4. С. 129–136.
8. Берник П. С., Цуркан О. В. Маятниковый преобразователь колебательного движения во вращательное. *Вопросы вибрационной технологии*. 2003. С. 16–20.

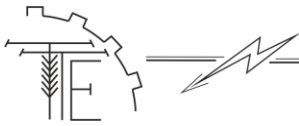
**References**

- [1] Subach, A. P. (1991). Dinamika protsessov i mashin obyemnoy obrabotki [Dynamics of processes and volumetric processing machines]. Riga [in Latvian].
- [2] Polievoda, Yu. A. (2015) Perspektyvy zastosuvannya vibratsiynykh efektiv v ridkykh tekhnolohichnykh systemakh kharchovykh i pererobnykh vyrobnytstv [Prospects for the application of vibration effects in liquid technological systems of food and processing industries]. *Zbirnyk naukovykh prats' Vinnytskoho natsionalnoho ahrarynoho universytetu. Collection of scientific works of Vinnytsia National Agrarian University*, 1, 124–130 [in Ukrainian].
- [3] Babichev, A. P. (1994) Problemy vibratsionnoy tekhnologii [Vibration technology problems]. *Vibrations in engineering and technology*, 1, 1–13 [in Ukrainian].
- [4] Nikolayev, V. N. (2004). Razrabotka i obosnovaniye osnovnykh parametrov vibratsionnogo smesitelya sypuchikh kormov [Development and substantiation of the main parameters of a vibration mixer for bulk feed]. *Candidate's thesis*. Chelyabinsk: Chelyabinsk State Agroengineering University [in Russian].
- [5] Blechman, I. I. (1976). Metod pryamogo razdeleniya dvizheniy v zadachakh o deystvii vibratsii na nelineynyie mekhanicheskiye sistemy [Method of direct separation of movements in problems of vibration action on nonlinear mechanical systems]. *Ser. Mekhanika tverdogo tela Ser. Rigid body mechanics*, 6, 13–27 [in Russian].
- [6] Blechman, I. I. (1994). Vibratsionnaya mekhanika [Vibration Mechanics]. Moscow [in Russian].
- [7] Palamarchuk, I. P., Polievoda, Yu. A., Yanovich, V. P. (2009). Analiz matematichnoyi modeli vibrovodtsentrovoy mashyny dlya ochyshchennya ridkoyi syrovyny [Analysis of mathematical model of vibrocentric machine for purification of liquid raw materials]. *Vibratsiyyi v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh. Vibration technology issues*, 4, 129–136 [in Ukrainian].
- [8] Bernik, P. S., Tsurkan, O. V. (2003). Mayatnikovyy preobrazovatel kolebatel'nogo dvizheniya vo vrashchatel'noye [Pendulum transducer of oscillatory motion into rotary motion]. *Voprosy vibratsionnoy tekhnologii. Vibration technology issues*, 16–20 [in Ukrainian].

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРОРЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ**

Вибрационная механика и виброреология играют важную роль в сложившемся за последние годы новом разделе прикладной теории колебаний – теории вибрации и устройств. Эта теория изучает закономерности возбуждения и действия вибрации в различных механических системах; она включает также теорию машин, в которых вибрация используется для достижения полезных целей.

На основе рассмотренных моделей оказалось возможным описать хаотическое движение слоя сыпучей среды над вибрирующей плоскостью. Такие движения, хорошо известные для жидкости, действительно удалось наблюдать и в случае сыпучей среды, что служит еще одним подтверждением возможности моделирования медленных движений сыпучей среды при вибрации в виде движений вязкой жидкости (конечно, со сделанными выше оговорками и дополнениями).



При изучении описанных простейших моделей движения (в том числе и тех, что нас интересует медленное) может быть найдено путем непосредственного использования решения задачи о вибротранспортировке тела (частицы). Значение данного подхода определяется, однако, возможность его применения для приближенного решения возникает в более сложных случаях. При изучении медленных движений тел, взаимодействующих как с помощью сил сухого трения, так и столкновений, указанные взаимодействия могут моделироваться силами вязкого трения с учетом движущей вибрационной силы. Это приводит к изложенному ниже виброреологическому подходу к моделированию поведения сыпучей среды в вибрирующих лотках и сосудах.

Из всех рассмотренных моделей наиболее перспективной является модель поведения сыпучей среды при воздействии вибрации в виде вязкой среды. Описанные модели могут быть использованы и при рассмотрении практически важной задачи о проникновении вибрации в сыпучую среду.

**Ключевые слова:** виброреология, анализ, вибротранспортировка, рабочий контейнер, сегрегация, псевдооживление.

**Ф. 21. Рис. 9. Лит. 8.**

## RESEARCH OF VIBROREOLOGICAL MODELS OF LAYER OF BULK ENVIRONMENT

Vibration mechanics and vibroreology play an important role in the new section of applied vibration theory formed in recent years - the theory of vibration processes and devices. This theory studies the patterns of excitation and vibration in different mechanical systems; it also includes the theory of machines in which vibration is used to achieve useful goals.

Based on the considered models, it was possible to describe the chaotic motion of the bulk medium layer over the vibrating plane. Such movements, well known for liquids, have indeed been observed in the case of a bulk medium, which serves as another confirmation of the possibility of modeling slow motions of a bulk medium during vibration in the form of viscous fluid motions (of course, with the above caveats and additions).

When studying the described simplest models, motion (including we are interested in slow motion) can be found by directly using the solution of the problem of vibrotransportation of the body (particles). The value of this approach is determined, however, by the possibility of its application for an approximate solution in more complex cases. In the study of slow motions of bodies interacting with both the forces of dry friction and collisions, these interactions can be modeled by the forces of viscous friction, taking into account the driving vibration force. This leads to the following vibroreological approach to modeling the behavior of the bulk medium in vibrating trays and vessels.

Of all the considered models, the most promising is the model of the behavior of the bulk medium under the influence of vibration in the form of a viscous medium. The described models can be used when considering a practically important task of vibration penetration into a free medium.

**Key words:** vibroreology, analysis, vibrotransportation, working body, segregation, pseudo-rarefaction.

**F. 21. Fig. 9. Ref. 8.**

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Полсвода Юрій Алікович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри технологічних процесів та обладнання переробних і харчових виробництв Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: [vinyura36@gmail.com](mailto:vinyura36@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-2485-0611>)

**Волинець Євгеній Олександрович** – аспірант 1-го року навчання, інженерно-технологічного факультету, Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: [evgen110596@gmail.com](mailto:evgen110596@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-3298-6316>).

**Полевода Юрій Алікович** – кандидат технических наук, доцент кафедры технологических процессов и оборудования перерабатывающих и пищевых производств Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, 21008, Украина, e-mail: [vinyura36@gmail.com](mailto:vinyura36@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-2485-0611>).

**Вольнец Евгений Александрович** - аспирант 1-го года обучения, инженерно-технологического факультета, Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, 21008, Украина, e-mail: [evgen110596@gmail.com](mailto:evgen110596@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-3298-6316>).

**Polievoda Yurii** – PhD, Associate Professor of the Department of Technological processes and Equipment for Processing and Food Productions of the Vinnytsia National Agrarian University (3, Sonyachna st., Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: [vinyura36@gmail.com](mailto:vinyura36@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-2485-0611>).

**Volynets Yevhenii** – post-graduate student of the 1st year of study, Faculty of Engineering and Technology, Vinnytsia National Agrarian University (3 Sunny Street, Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: [evgen110596@gmail.com](mailto:evgen110596@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-3298-6316>).